

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM  
AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 41

Kelvin's schip-golf probleem

door

S.J. Bijlsma



oktober 1965

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM  
AMSTERDAM

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

## Inhoud

|                                                              | blz. |
|--------------------------------------------------------------|------|
| Inleiding                                                    | 1    |
| I. Probleemstelling en historisch overzicht                  | 3    |
| 1. golfpatroon veroorzaakt door een bewegende drukverstoring | 3    |
| 2. historisch overzicht                                      | 7    |
| II. Stationair schip-golf probleem                           | 12   |
| 1. water van oneindige diepte                                | 12   |
| 2. water van eindigde diepte                                 | 20   |
| III. Niet-stationair schip-golf probleem                     | 28   |
| 1. water van oneindige diepte                                | 28   |
| 2. water van eindige diepte                                  | 30   |
| IV. Appendix                                                 | 31   |
| Literatuur-overzicht                                         | 33   |



## Inleiding

Op de 3e augustus 1887 hield Lord Kelvin (Sir William Thomson) in Edinburgh een lezing, getiteld: On ship waves, waarin voor de eerste maal een verklaring werd gegeven van een golfverschijnsel, dat optreedt, als een drukverstoring zich over een wateroppervlak voortbeweegt (bv. een varend schip). Tevoren waren op dit gebied reeds experimenten gedaan door William Froude, voortgezet door Edmund Froude, die volgens Kelvin van bijzonder veel belang waren voor de scheepsbouw. Kelvin toonde aan dat het hele golfpatroon beperkt blijft tussen twee lijnen, getrokken van de boeg van het schip, die een hoek van  $19^{\circ}28'$  maken met de richting, tegengesteld aan de vaarrichting. Theoretisch is er op een oneindige afstand voor het schip en in iedere richting een verstoring, maar het bedrag hiervan is buitengewoon klein, tenzij men tussen de twee bovengenoemde lijnen komt. Op deze lijnen verkreeg hij een oneindige waarde (dit als gevolg van het feit dat in het mathematische model gebruik wordt gemaakt van een "infinitely intense" drukverstoring, zoals Kelvin dit noemde). Op grond van beschouwingen betreffende groep en fasesnelheid, die blijkbaar niet gepubliceerd zijn, verkrijgt hij een golfpatroon, dat we in de volgende bladzijden uitgebreid zullen behandelen. Opgemerkt zij nog, dat Kelvin bij zijn onderzoekingen tot integralen kwam van het type:

$$\int_0^{\infty} \cos m[x - tf(m)] dm$$

voor het effect op plaats en tijd  $(x, t)$  van een "infinitely intense" verstoring op plaats en tijd  $(0, 0)$ , waar hij op heuristische wijze de volgende benaderingsmethode op toepaste: Indien  $t$  groot is zullen voor vaste  $\frac{x}{t}$ , die delen van de integraal, welke aan weerszijden van een klein interval om  $m_0$ , bepaald door  $\frac{d}{dm}\{m[x - tf(m)]\} = 0$ , liggen door interferentie verdwijnen. Ontwikkeling in de omgeving van  $m = m_0$  geeft:

$$m[x - tf(m)] = m_0[x - tf(m_0)] - \frac{1}{2}t[m_0 f''(m_0) + 2f'(m_0)](m - m_0)^2.$$

Stelt men verder:  $m - m_0 = \frac{s\sqrt{2}}{t^2 [-m_0 f''(m_0) - 2f'(m_0)]^{\frac{1}{2}}}$  dan vinden we voor

het effect van de verstoring:

$$\sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[tm_0^2 f'(m_0) + s^2] ds}{t^2 [-m_0 f''(m_0) - 2f'(m_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

wat na uitwerking van de integratie overgaat in:

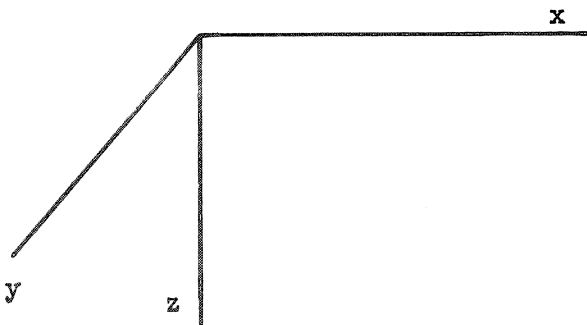
$$\frac{\sqrt{2} \cdot \cos[tm_0^2 f'(m_0) + \pi/4]}{t^2 \cdot [-m_0 f''(m_0) - 2f'(m_0)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Deze methode zou later onder de naam "methode van de stationaire fase" bekend worden. In de volgende bladzijden zal allereerst een uiteenzetting van het door Kelvin beschouwde probleem gegeven worden, gevolgd door een historisch overzicht van wat er op dit gebied is gepubliceerd, wat uitsluitend betrekking zal hebben op het stationaire probleem, waarna we zullen eindigen met het bekijken van het niet-stationaire probleem.

# I. Probleemstelling en historisch overzicht

## 1. Golfpatroon veroorzaakt door een bewegende drukverstoring

Allereerst zullen we een afleiding geven van de vergelijkingen, die als basis dienen voor het beschrijven van trillingen van een vrij wateroppervlak  $S$  onder invloed van een uitwendige kracht. We spreken in dit geval over water als een ideale, incompressibele vloeistof, terwijl we aannemen dat de vloeistofstroming rotatie vrij is. We voeren hiertoe een orthogonaal coördinatenstelsel in met de  $x$ - en  $y$ -as in het wateroppervlak en een positieve  $z$ -as in het water. Beschouwen we verder een snelheidspotentiaal  $\phi(x,y,z)$  dan zal in de vloeistof gelden  $\Delta\phi = 0$  terwijl de vrije oppervlak-conditie bepaald wordt door de wet van Bernouilli en de voorwaarde



dat een deeltje, dat zich op  $S$  bevindt, daar blijft. Stellen we  $S$  voor door  $z = \eta(x,y,t)$  dan zijn deze voorwaarden  $g\eta + \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + p/\rho = 0$  en  $\frac{d}{dt} (y - \eta) = 0$ , uitgeschreven

$\phi_x \eta_x - \phi_y + \phi_z \eta_z + \eta_t = 0$ . We kunnen deze voorwaarden lineariseren door aan

te nemen dat zowel  $\phi$ ,  $\eta$  als hun afgeleiden

klein zijn en verkrijgen dan als probleem: Een functie  $\phi$  te bepalen zodat:

$$\Delta\phi = 0 \quad z > 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\eta = \frac{\partial \phi}{\partial t} - p \quad z = 0$$

waarin we  $\rho = g = 1$  gesteld hebben.

Nemen we verder  $p = \frac{\partial(r)}{2\pi r} \circ \partial(t)$  dan geeft Laplacetransformatie:

$$\Delta\bar{\phi} = 0 \text{ met als randvoorwaarden} \quad s\bar{\eta} = \bar{\phi}_z$$

$$\bar{\eta} = s\bar{\phi} - \frac{\delta(r)}{2\pi r}.$$

Laat  $\bar{\phi} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} f(\lambda, s) J_0(\lambda r) d\lambda$  dan geldt:

$$s\bar{\eta} = - \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda f(\lambda, s) d\lambda = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} s^2 f(\lambda, s) J_0(\lambda r) d\lambda = s \cdot \frac{\delta(r)}{2\pi r},$$

waaruit:  $\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty (s^2 + \lambda) e^{-\lambda z} \cdot f(\lambda, s) J_0(\lambda r) d\lambda = s \cdot \frac{\delta(r)}{2\pi r}$ . M.b.v. de inverse

Hankeltransformatie vinden we:

$$(s^2 + \lambda) f(\lambda, s) = \lambda s \int_0^\infty \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot dr = \frac{1}{2\pi} \lambda \cdot s \text{ zodat } f(\lambda, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda s}{s^2 + \lambda}$$

$$\text{en } \bar{\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{s}{s^2 + \lambda} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \text{ zodat we voor de snelheidspotentiaal}$$

vinden:

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \cos(t\sqrt{\lambda}) J_0(\lambda\sqrt{x^2 + y^2}) \lambda d\lambda \text{ en daar}$$

$$\eta = \phi_t(z=0) - p \text{ vinden we}$$

$$(I.1.1) \quad \eta = - \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \sin(t\sqrt{\lambda}) J_0(\lambda\sqrt{x^2 + y^2}) \lambda^{3/2} d\lambda.$$

Deze formule zal als uitgangspunt dienen voor verdere beschouwingen. Toepassing van de methode van de stationaire fase op (I.1.1) geeft:

$$\eta \sim - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \sin t\sqrt{\lambda} \cos(\lambda r - \pi/4) \lambda d\lambda$$

$$\sim - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda^2 z} \sin \lambda t \cos(\lambda^2 r - \pi/4) \lambda^3 d\lambda$$

$$\sim - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cdot (I_1 + I_2) \quad \text{waar:}$$

$$I_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 z} \sin(\lambda^2 r + \lambda t - \pi/4) \lambda^3 d\lambda$$

$$I_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 z} \sin(-\lambda^2 r + \lambda t + \pi/4) \lambda^3 d\lambda.$$

Toepassing van de methode van de stationaire fase op  $I_1$  resp.  $I_2$  geeft:  $\lambda_{1,2} =$   
 zodat de resp. argumenten geschreven kunnen worden als:  $= \pm \frac{t}{2r}$

$$\lambda^2 r + \lambda t - \pi/4 = -(\frac{t^2}{4r} + \pi/4) + r(\lambda - \lambda_1)^2$$

$$-\lambda^2 r + \lambda t + \pi/4 = (\frac{t^2}{4r} + \pi/4) - r(\lambda - \lambda_2)^2.$$

Uitwerking geeft:

$$(I.1.2) \quad \eta \sim - \frac{t^3}{2^{7/2} \pi r^4} \sin \frac{t^2}{4r}.$$

Met behulp van deze uitdrukking kunnen we nu in eerste benadering de oppervlakteverstoring  $\eta$  bepalen t.g.v. een bewegend schip (bewegende drukverstoring). We voeren een orthogonaal  $(x,y)$  coördinatenstelsel in en laten langs de positieve  $x$ -as een drukverstoring met constante snelheid  $c$  bewegen van  $x = 0$  naar  $x = cT$ . Zij bovendien  $t^* = T - t$  dan vinden we voor de oppervlakteverstoring in een punt  $P(x,y)$ :

$$\eta(x,y) = \text{const.} \int_0^T \frac{t^{*3}}{r^4} \cdot \sin \frac{t^{*2}}{4r} dt^*.$$

We merken op dat er voor een fase geen grote parameter voorkomt. Nadere beschouwing leert echter (Stoker ch. 8) dat men dit, door over te gaan op dimensieloze variabelen wel kan bereiken.

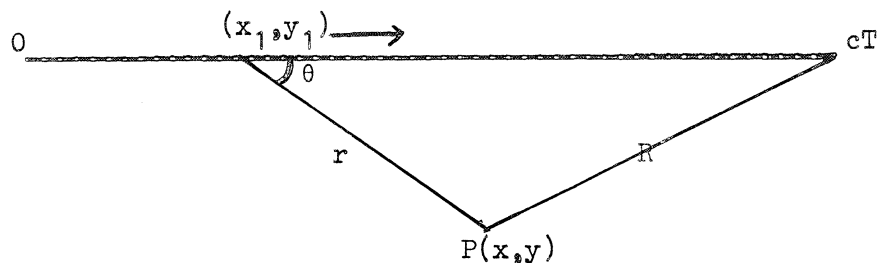


fig. 1.

De uit de methode van de stationaire fase volgende relatie tussen  $r$  en  $t^*$  vinden we uit:

$$\frac{d}{dt^*} \left( \frac{t^{*2}}{4r} \right) = 0. \quad \text{Er geldt bovendien}$$

$$\frac{dr}{dt^*} = c \cos \theta \quad \text{zo dat deze beide de relatie}$$

leveren:

$$(I.1.3) \quad r = \frac{1}{2} ct^* \cos \theta.$$

De relatie (I.1.3) betekent dus, dat voor het bepalen van de oppervlaktever storing in punt P (binnen de orde van de beschouwde approximatie) alleen die punten van de baan bijdragen, die aan (I.1.3) voldoen. We kunnen nu de zaak omdraaien en uitgaande van een punt Q op de baan, de punten P construeren, waarvoor Q het punt van stationaire fase is van de integraal. De andere punten zullen hun bijdragen door interferentie verloren zien gaan.

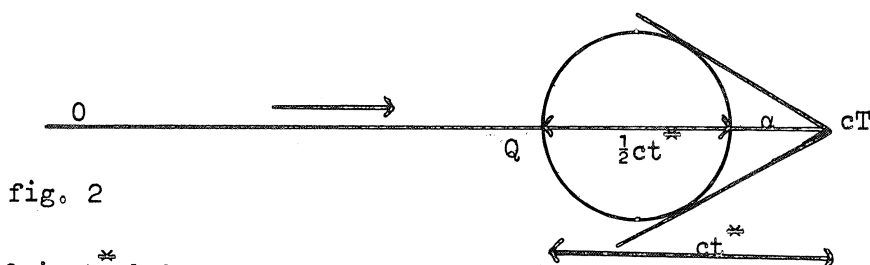


fig. 2

In punt Q is  $t^*$  bekend, evenals  $c$ , zodat (I.1.3) alle punten P geeft in poolcoördinaten t.o.v. punt Q, d.w.z. ze liggen op de in fig. 2 getekende cirkel. We zien hieruit dat het gehele golfpatroon (uit de hier beschouwde benadering) binnen 2 rechte lijnen blijft (indien  $c = \text{constant}$ ) bepaald door

$$\sin \alpha = \frac{\frac{1}{4} ct^*}{\frac{3}{4} ct^*} = \frac{1}{3} \quad (\alpha = 19^\circ 28'). \quad \text{Indien } c \neq \text{constant zullen we i.p.v. de rechte}$$

lijnen de omhullenden van de door (I.1.3) bepaalde cirkels verkrijgen. Om tot een karakteristiek van het golfpatroon te komen, zullen we nu als laatste de lijnen van constante fase bepalen. De coördinaten van punt P(x,y) (fig. 1) bedragen:

$$x = ct^* - r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

Stellen we  $a = \frac{c^2 t^2}{2r}$  dan vinden we m.b.v. (I.1.3):

$$ct^* = a \cos \theta$$

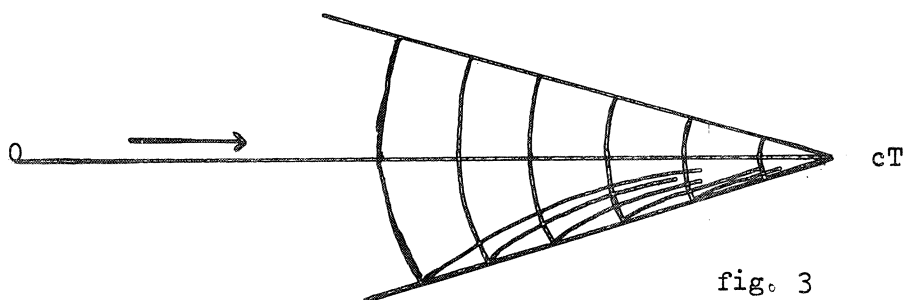
$$r = \frac{1}{2} a \cos^2 \theta.$$

Substitueren we dit dan vinden we de lijnen van constante fase in parametervorm

$$x = \frac{a}{2} (2 \cos \theta - \cos^3 \theta)$$

$$y = -\frac{a}{2} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Beschouwen we deze lijnen in een figuur (fig. 3) dan zien we het optreden van 2 soorten golven: een divergerend en een transversaal systeem. Bovendien blijkt dat de lijnen van het divergerend systeem de vaarlijn niet snijden.



Opgemerkt zij nog dat deze schets een bijzonder nauwgezette overeenkomst vertoont met de werkelijkheid.

## 2. Historisch overzicht

In de loop der jaren hebben verschillende auteurs gepoogd een betere asymptotische benadering, dan met de methode van de stationaire fase mogelijk is, te verkrijgen voor de oppervlakteverstoring in een punt, meebewegend met de drukverstoring. We zullen in het kort de resultaten bespreken van: Lamb, Hogner, Peters, Ursell en als voorbeeld van een meer moderne aanpak Timman. Anderen die er aan gewerkt hebben zijn o.a. Hoff en Havelock. Rest nog te vermelden dat het Peters (1949) m.b.v. de ~~steepest-descent~~

methode voor het eerst gelukt is een volledige asymptotische ontwikkeling te geven voor het stationaire schip-golfpatroon in water van oneindige diepte.

a. Lamb

Lamb gaat uit van het in (I.1) gestelde probleem de oppervlakte verstoring te bepalen t.g.v. een in de oorsprong geconcentreerde, instantane drukverstoring. Als oplossing voor de snelheidspotentiaal wordt gevonden:

$$\phi = \text{const.} \int_0^\infty \cos t\sqrt{k} e^{kz} J_0(kr) k dk.$$

In de behandeling van het 2-dimensionale geval voert hij een wrijvingsfactor  $m$  in, in de bepaling van  $\phi$  voor een bewegende drukverstoring. Zou hij hier op analoge wijze de wrijvingsfactor  $m$  hebben ingevoerd dan zou hij voor de snelheidspotentiaal van een bewegende drukverstoring verkregen hebben (in meebewegende coördinaten):

$$\phi = \text{const.} \lim_{m \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-mt} dt \int_0^\infty k e^{kz} \cos t\sqrt{k} \cdot J_0\{k[(x-ct)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}\} dk.$$

Bovenstaande  $\phi$  kan door een transformatie overgevoerd worden in de oplossing die Peters voor de snelheidspotentiaal vindt (Peters pag. 137). Er zij wel opgemerkt dat men voor het doen slagen van deze transformatie de factor  $m$  nodig heeft, hoewel deze niet nodig is voor convergentie van de integraal.

b. Hogner

Hogner gebruikt bovenstaande wrijvingscoëfficiënt  $m$  niet. Ook hij gaat uit van het in (I.1) gestelde probleem. Door invoering van nieuwe coördinaten  $(\xi, y, z)$  met  $\xi = x - ct$  gaat hij direct over op het probleem een snelheidspotentiaal  $\phi(\xi, y, z)$  te bepalen, in geval van een met snelheid  $c$  bewegende drukverstoring, waarbij  $\xi$  dus de meebewegende coördinaat is. Het nu stationaire probleem is:

$$\Delta\phi = 0$$

$$c \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = c^2 \cdot \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

$$(\phi_z)_{z=\infty} = 0$$

$$\text{met } \eta = c \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{z=0}.$$

Hogner beschouwt in het bijzonder het geval dat de drukverstoring over een eindig gebied  $S$  gedefiniëerd is en komt dan tot:

$$\phi(\xi, y, z) = \text{const. Re} \iint_S p(\xi_0, y_0) d\xi_0 dy_0 \int_{-\infty}^{\frac{\xi - \xi_0}{y - y_0}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{z}{e^c} \frac{1}{2} (u^2 + 1) + 1/c^2 [(\xi - \xi_0) + (y - y_0)u] u \sqrt{u^2 + 1} du.$$

De uitdrukkingen, die Hogner m.b.v. bovenstaande afleidt in een omgeving van de kritieke lijnen  $\theta_c$  blijken van vorm te veranderen indien men  $\theta_c$  passeert (vgl. (82) en (83) bladz. 40). Wegens de gecompliceerdheid van de formules zullen we hier volstaan te verwijzen naar het desbetreffende artikel.

#### c. Peters

Peters gaat direct van een stationair probleem uit. Hij beschouwt het in (I.1) gedefiniëerde assenstelsel en neemt aan dat het water zich met constante snelheid  $c$  beweegt in de richting van de positieve  $x$ -as. Als snelheidspotentiaal neemt hij:  $\phi_0(x, y, z) = \phi(x, y, z) - cx$ . Indien zich nu een in de oorsprong geconcentreerde oppervlakte drukverstoring bevindt dan is het probleem, een  $\phi$  te vinden zodat:

$$\Delta \phi = 0 \quad z > 0$$

$$p + \eta_x - c\phi_x = 0$$

$$\phi_z + c\eta_x = 0 \quad z = 0$$

terwijl voor  $z = \infty$ ,  $\phi_z$  uiteraard nul moet zijn. De uitdrukking welke hij voor  $\phi(x > 0)$  vindt, valt uiteen in  $\phi^{**}$  en  $\phi^{***}$ , waarbij  $\phi^{**}(x > 0) = \phi(x < 0)$ .

$$\phi^{***} = \text{const.} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{-z}{c} \cdot \cos^2 h \frac{p}{2} \right\} \cos^2 h \frac{p}{2} \cos \left( \frac{y}{2c} \sinh p \right) \cos \left( \frac{x}{c} \cosh \frac{p}{2} \right) dp.$$

De hieruit volgende oppervlakte verstoring bedraagt:

$$\eta^{***} = \text{const.} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iR \sin \theta [\cot \theta \cosh p - \frac{1}{2} \sinh 2p]} \cos^3 h p \, dp.$$

M.b.v. de zadelpuntsmethode kunnen we hieruit in de verschillende gebieden achter de drukverstoring de oppervlakteverstoring bepalen. Peters doet dit (pag. 143 e.v.), maar er blijven twee problemen over, waarvoor Peters geen juiste oplossing weet aan te geven, nl. in de buurt van de kritieke lijnen gedefiniëerd door  $\cot^2 \theta - 8 = 0$  en langs de positieve x-as. De oplossing hiervoor is door Ursell gegeven.

#### d. Ursell

Ursell gaat uit van de door Peters gegeven integraal voorstelling en beschouwt in het bijzonder de gebieden om  $\theta = 0$  (waar  $\theta$  en  $z$  klein zijn) en  $\theta = \theta_c$ . Hij schrijft de door Peters gevonden uitdrukking in de juiste vorm:

$$\eta^{***} = \text{const.} \operatorname{Im.} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2) \exp \left[ iR \left\{ (\cos \theta - u \sin \theta) \sqrt{1+u^2} \right\} \right] \exp \{-z(1+u^2)\} du.$$

Ursell toont aan dat de limieten die we verkrijgen, door  $\theta = 0$  resp.  $\theta > 0$  te nemen, en vervolgens een integratieweg te kiezen, zodat de integrand hierlangs naar nul gaat voor we  $z \rightarrow 0$  laten gaan (zadelpuntsweg) niet uniform zijn. Vervolgens leidt hij m.b.v. de methode van Chester, Friedman en Ursell een uitdrukking af voor  $y^{***}$  geldig in een kleine omgeving van  $\theta_c$  in termen van Airy-functies.

e. Timman

Timman heeft voor het eerst bij de beschrijving van de drukverstoreng gebruik gemaakt van de  $\delta$ -functie en de eigenschappen hiervan. Hij komt tot een uitdrukking voor de snelheidspotentiaal:

$$\phi(x,y,z) = \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i(px+qy) - z \sqrt{p^2+q^2} \right] \frac{ip}{p^2 - \sqrt{p^2+q^2}} dp dq$$

(waarin  $c = 1$  gesteld is (evenals bij Peters en Ursell))

waarmee hij niet verder komt dan een benadering d.m.v. stationaire fase methode.

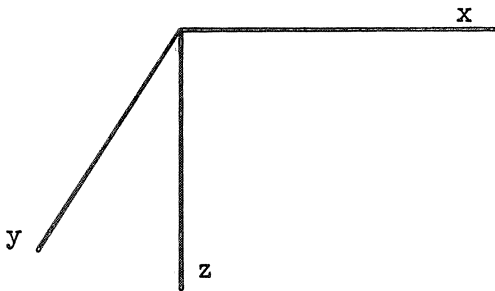
Alvorens dit gedeelte af te sluiten willen we nog vermelden dat de artikelen van Peters, waarin hij tot bovengenoemde enkelvoudige integraal komt en speciaal dat van Hogner, vrij ingewikkeld en lang zijn.

Het doel dat we ons in de volgende bladzijden stellen is een eenvoudiger afleiding te geven van de door Peters gevonden integraal d.w.z. in het geval van het stationaire schipgolfprobleem in water van oneindige diepte en bovendien te trachten deze methode toe te passen in het geval van het niet-stationaire schipgolfprobleem in water van zowel oneindige als eindige diepte.

## II. Stationair schipgolfprobleem

### 1. Water van oneindige diepte

Het probleem in (I.1) was de oppervlakte verstoring te bepalen t.g.v. een in de oorsprong van een orthogonaal  $(x, y, z)$  coördinatenstelsel geconcentreerde instantane drukverstoring en kon a.v. worden weergegeven:



$$\Delta \phi = 0 \quad z > 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad z = 0$$

$$\eta = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \delta(x, y) \delta(t)$$

waarvan de oplossing is:  $\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \cos t \sqrt{\lambda} J_0(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}) \lambda d\lambda$  en

de oppervlakte verstoring:  $\eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{3/2} \sin t \sqrt{\lambda} J_0(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}) d\lambda$ .

De oppervlakte verstoring t.g.v. een drukverstoring op  $t = t^*$  en  $x = ct^*$  bedraagt, indien  $t' = t - t^*$  en  $x' = x - ct^*$ :

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{x'^2 + y'^2}) \sin t' \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda$$

in oorspronkelijke coördinaten uitgeschreven:

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x-ct^*)^2 + y^2}) \sin(t-t^*) \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda.$$

De oppervlakte verstoring op tijdstip  $t$ , als de drukverstoring van  $x = 0$  naar  $x = ct$  gegaan is, bedraagt:

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t dt^* \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x-ct^*)^2 + y^2}) \sin(t-t^*) \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda.$$

Invoering van de meebewegende coördinaat  $x'$  door te stellen:  
 $x = x' + ct$  geeft:

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t du \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x'+cu)^2 + y^2}) \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda$$

waarin:  $u = t - t^*$ . Hiermee hebben we dus de niet-stationaire toestand gevonden in het meebewegende coördinatenstelsel. De stationaire toestand volgt hieruit voor  $t \rightarrow \infty$ :

$$(II.1.1) \quad \eta = -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x'+cu)^2 + y^2}) \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda$$

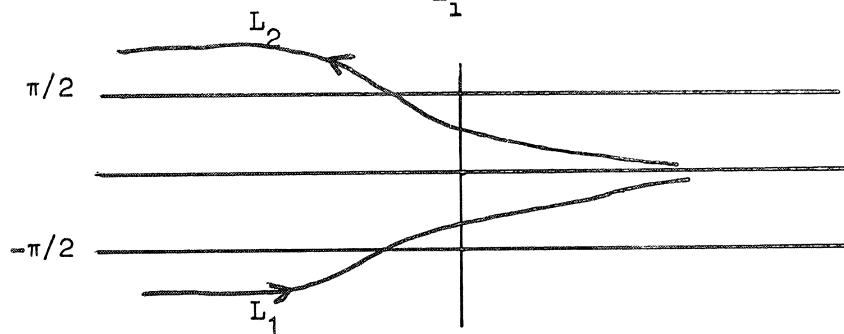
waarin we het accent verder zullen weglaten. Er geldt verder:

$$H_0^{(1)}(r) = J_0(r) + iY(r)$$

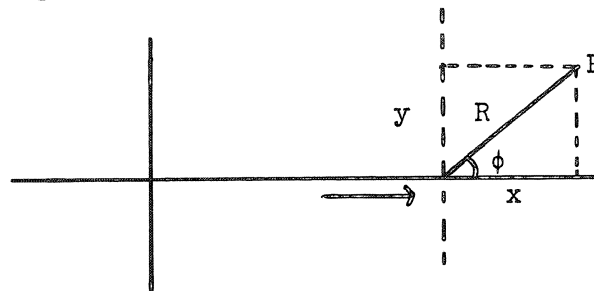
$$H_0^{(2)}(r) = J_0(r) - iY(r)$$

waarin:

$$H_0^{(i)}(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_i} e^{-\frac{1}{2}(re^{w'} - re^{-w'})} dw'.$$



Veronderstellen we verder:  $Re^{i\phi} = x + iy$  en schrijven we  $w' = w + i\phi$  dan worden de integratie wegen in het  $w$ -vlak over een afstand  $\phi$  in de richting van de imaginaire as verschoven.



Uit bovenstaande volgt nu dus:  $H_0^{(i)}(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_i} e^{-x \operatorname{sh} w - iy \operatorname{ch} w} dw$

waarmee (II.1.1) met weglating van constanten overgaat in:

$$(II.1.2) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-\lambda z} \int_{L_i} e^{-\lambda(x+cu)\operatorname{sh} w - i\lambda y \operatorname{ch} w} \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda dw.$$

De voorwaarde voor  $w = p + iq$  opdat  $e^{-\operatorname{Re} \lambda cu \operatorname{sh} w}$  naar nul gaat als  $u \rightarrow \infty$  is:

$$(II.1.3) \quad \begin{array}{ll} p < 0 & \pi/2 < q < 3\pi/2 \\ -3\pi/2 < q < -\pi/2 \\ p > 0 & -\pi/2 < q < \pi/2. \end{array}$$

Daar  $0 \leq \phi < \pi$  (waaruit we zien dat voor  $\phi = \pi$  d.w.z. op de baan achter het drukpunt de integraal divergeert), zien we dat integratie over de  $u$  uitgevoerd kan worden, daar de doorsnede van de stroken (II.1.3) met die, waarin  $L_i$  gedefiniëerd is, niet leeg is (behalve als  $\phi = \pi$ ), zodat convergentie van de integratie langs  $L_i$  verzekerd blijft.

De enige punten die uitgesloten moeten worden zijn  $(0, \pi/2)$  en  $(0, -\pi/2)$ , daar hier:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda cu \operatorname{sh} w} \sin u \sqrt{\lambda} du \quad \text{niet convergeert.}$$

We nemen hiertoe de Cauchy-hoofdwaarde van de integraal langs  $L_i$  met betrekking tot deze punten. Uitvoering van bovenstaande integratie geeft:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda cu \operatorname{sh} w} \sin u \sqrt{\lambda} du = "Im" \int_0^\infty e^{-u(\lambda c \operatorname{sh} w - i\sqrt{\lambda})} du = \frac{\sqrt{\lambda}}{c^2 \lambda^2 \operatorname{sh}^2 w + \lambda}$$

waarmee (II.1.2) overgaat in:

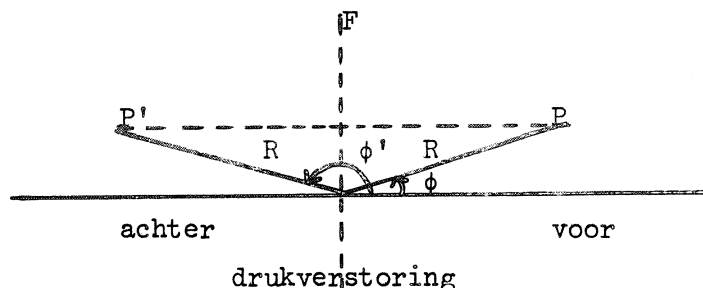
$$(II.1.4) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda d\lambda \int_{L_i} \frac{e^{-\lambda(x \operatorname{sh} w + i y \operatorname{ch} w)}}{\lambda c^2 \operatorname{sh}^2 w + 1} dw.$$

Met betrekking tot (II.1.4) nog de volgende opmerking. Hier staat eigenlijk:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda \, d\lambda \int_{L_1} e^{-\lambda x} \operatorname{sh} w - iy\lambda \operatorname{ch} w f(w) dw,$$

waar  $f(w)$  alleen gedefiniëerd is in de door (II.1.3) gegeven stroken. Het is nu echter mogelijk om  $f(w)$  buiten deze stroken analytisch voort te zetten.

Het is nu mogelijk twee gevallen te onderscheiden m.b.t. de oppervlakteverstoring nl. voor of achter de drukverstoring. We zullen nu aan de hand van schetsen de zaak zo overzichtelijk mogelijk proberen te behandelen.



We beschouwen in het bijzonder de oppervlakte verstoringen in punten P en P' die elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de lijn F en we zullen beginnen met de toestand voor het schip.

$$x > 0 \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

De oppervlakte verstoring kan in dit geval beschreven worden als ( $c = 1$ ):

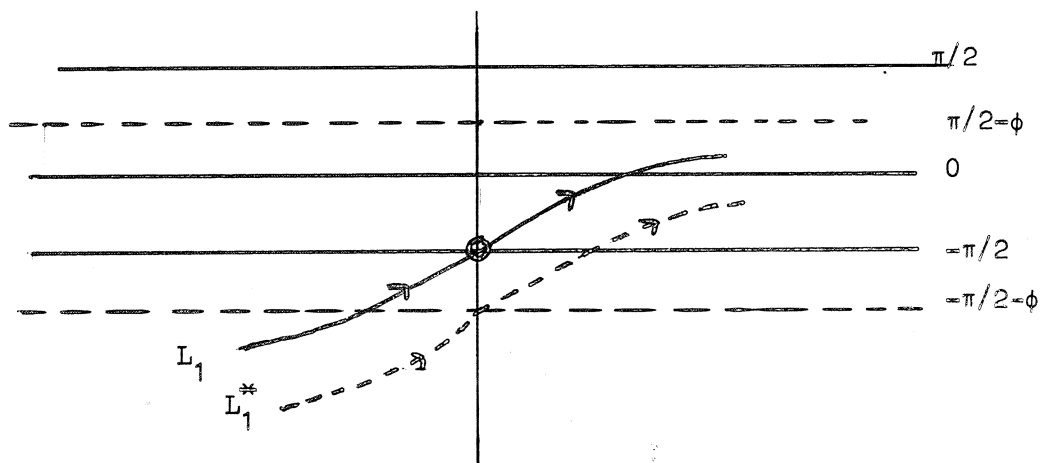
$$(II.1.5) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda \, d\lambda \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda R \operatorname{sh}(w+i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw$$

waarin dus  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$  en  $L_1$  in de vakken (II.1.3).

Het zadelpunt volgt uit  $\operatorname{ch}(w_0+i\phi) = 0$  en de zadelpuntsweg uit  $\operatorname{Im} \operatorname{sh}(w+i\phi) = \operatorname{Im} \operatorname{sh}(w_0+i\phi)$ . Indien we zadelpunt  $(0, -\pi/2-\phi)$  nemen, krijgen we als "steepest descent" weg ( $L_1^*$ )

$$\operatorname{ch} p \sin(q + \phi) = -1$$

waaruit blijkt dat de integratie weg  $L_1$  tot  $L_1^*$  herleid kan worden, mits we de tussenliggende polen in aanmerking nemen.



De polen worden gevonden uit:  $\lambda \text{sh}^2 w + 1 = 0$ ,  $\text{sh } w = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$  en liggen voor:

$$1 < \lambda \leq \infty \quad \text{op de imaginaire as}$$

$$0 \leq \lambda < 1 \quad \text{op de reële as.}$$

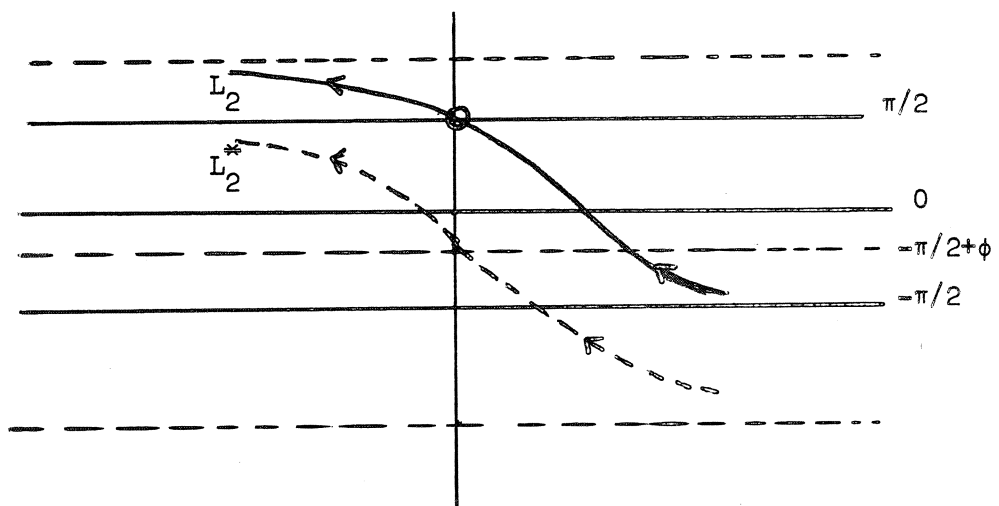
Deze ligging suggereert een splitsing van de integraal (II.1.5) in  $\int_0^1 d\lambda$  en  $\int_1^\infty d\lambda$ . Alvorens tot berekeningen over te gaan zullen we de toestand achter de drukverstoring bekijken.

$$x < 0 \quad \pi/2 \leq \phi' < \pi$$

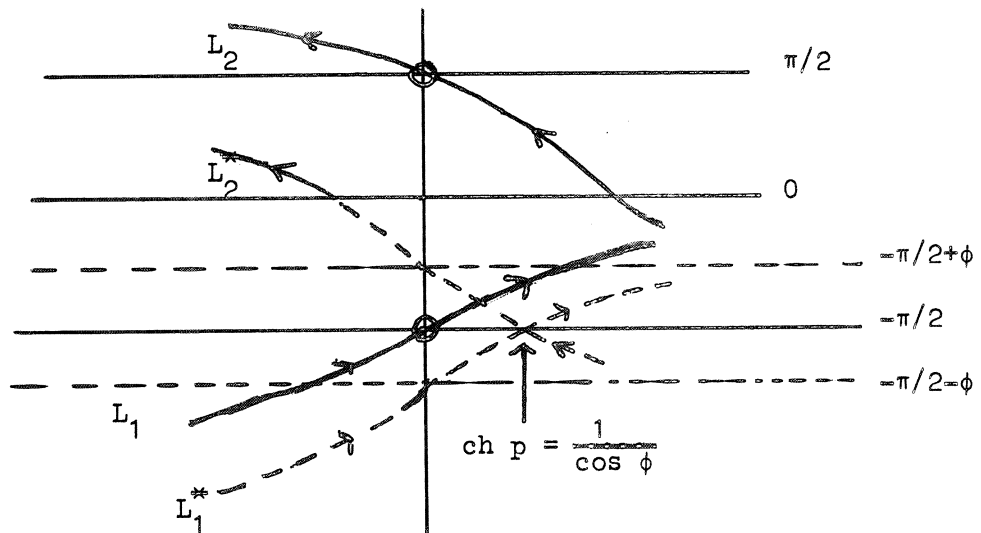
We vinden hier een analoge situatie, met dit verschil dat nu (II.1.5) overgaat in:

$$(II.1.6) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Im.} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda \, d\lambda \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda R \text{sh}(w+i\phi')}}{\lambda \text{sh}^2 w + 1} \, dw$$

waarin  $x = R \cos \phi'$ ,  $y = R \sin \phi'$  en  $L_1$  in vakken (II.1.3). Het zadelpunt en de "steepest descent" weg zijn op bovenstaande wijze te verkrijgen. Bedenken we echter dat  $\phi' = \pi - \phi$  dan is  $-\lambda R \text{sh}(w+i\phi') = \lambda R \text{sh}(w-i\phi)$  en gebruiken we zadelpunt  $(0, -\pi/2+\phi)$  dan vinden we als "steepest descent" weg  $L_2^*$ , waartoe de weg  $L_2$  te herleiden is, nl.  $\text{ch } p \sin(q - \phi) = -1$ .



Ook hier gaan we de integratie in (II.1.6) splitsen in  $\int_0^1 d\lambda$  en  $\int_1^\infty d\lambda$ . Het is nu overzichtelijk deze beide toestanden in een enkele figuur te schetsen. Bovendien blijkt dat, wanneer we de contour-integralen willen kwijt raken, we het verschil van  $\eta(x < 0)$  en  $\eta(x > 0)$  moeten nemen.



Uit de figuur volgt:

$$\int_{L_2} - \int_{L_2^*} = 2\pi i R_2 \quad \text{waar } R_2 \text{ residu is t.g.v. een pool in shw} = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\int_{L_1} - \int_{L_1^*} = -2\pi i R_1.$$

We vinden nu:

$$\eta(x < 0) - \eta(x > 0) = \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im}_0 \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda \, d\lambda \left\{ \int_{L_2} \frac{e^{\lambda R \operatorname{sh}(w-i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw - \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda R \operatorname{sh}(w+i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw \right\}$$

wat te schrijven is als:

$$\eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im}_0 \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty e^{-\lambda z} \lambda \, d\lambda \{ 2\pi i (R_1 + R_2) + \int_{L_2^*} \frac{e^{\lambda R \operatorname{sh}(w-i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw - \int_{L_1^*} \frac{e^{-\lambda R \operatorname{sh}(w+i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw \} \right\}.$$

Door invoering van de Hankelfuncties en bovenstaande procedure hebben we een zekere asymmetrie t.o.v.  $\phi$  in de formules gebracht. We moeten nu dat gedeelte van de oplossing nemen, waarvoor geldt  $\eta(\phi) = \eta(-\phi)$ . Nadere berekening leert dat de laatste twee integralen juist aan elkaar gelijk zijn. Er geldt nl.:

$$\int_{L_1^*} \frac{e^{-\lambda R \operatorname{sh}(w+i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw = \int_{L_3^*} \frac{e^{-\lambda R \operatorname{sh}(w-i\phi)}}{\lambda \operatorname{sh}^2 w + 1} dw$$

waar  $L_3^*$  de gespiegelde is van  $L_2^*$  t.o.v.  $q = -\pi/2 + \phi$ .

Verder leert een eenvoudige berekening dat voor  $0 \leq \lambda < 1$  de residu-bijdragen t.o.v. polen op de reële as eveneens tegen elkaar wegvallen, zodat we nu het geval zullen beschouwen dat  $1 < \lambda \leq \infty$ . Bij de deformatie van  $L_2$  tot  $L_2^*$  krijgen we, daar de polen zich in  $\operatorname{sh} w_0 = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$  bevinden ( $\sin q = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ,  $p = 0$ ):

$$\text{Residu in } \operatorname{sh} w_0 = \frac{i}{\sqrt{\lambda}}: \lim_{w \rightarrow w_0} 2\pi i \frac{e^{\lambda R \{ \operatorname{sh} w_0 \cos \phi - i \sin \phi \operatorname{ch} w_0 \}} (w=w_0)}{(\operatorname{sh} w_0 + \frac{i}{\sqrt{\lambda}})(\operatorname{sh} w_0 - \frac{i}{\sqrt{\lambda}} + \operatorname{ch} w_0 (w=w_0))}$$

met als uitkomst:  $2\pi \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} e^{iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi - \sqrt{\lambda-1} \sin \phi)}$ .

Op analoge wijze bedraagt het residu in  $\text{sh} w_0 = \frac{-i}{\sqrt{\lambda}}$ :

$$-2\pi \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot e^{iR\sqrt{\lambda}(-\cos \phi - \sqrt{\lambda-1} \sin \phi)}.$$

De bijdragen bij het overvoeren van  $L_2$  in  $L_2^*$  zijn resp.:

$$\text{Im.} \lim_{z \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot e^{-\lambda z} e^{iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi - \sin \phi \sqrt{\lambda-1})} d\lambda$$

en

$$-\text{Im.} \lim_{z \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} e^{-\lambda z} e^{-iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi + \sin \phi \sqrt{\lambda-1})} d\lambda =$$

$$\text{Im.} \lim_{z \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot e^{-\lambda z} e^{iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi + \sin \phi \sqrt{\lambda-1})} d\lambda =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot e^{-\lambda z + iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi + \sin \phi \sqrt{\lambda-1})} d\lambda$$

waar de laatste term juist de bijdrage is bij de deformatie van  $L_1$  in  $L_1^*$ , zodat optellen geeft:

$$2 \lim_{z \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} e^{-\lambda z} \{ \sin(R \cos \phi \sqrt{\lambda}) \cos(R \sin \phi \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda-1}) \} d\lambda$$

waar gebruik is gemaakt van het feit dat moet gelden  $\eta^*(\phi) = \eta^*(-\phi)$ .

Substitutie van  $\lambda = \cosh^2 p$  geeft:

$$\eta^* = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z \cosh^2 p} \{ \sin(R \cos \phi \cosh p) \cos(R \sin \phi \frac{1}{2} \text{sh} 2p) \} \cos^3 hp \, dp.$$

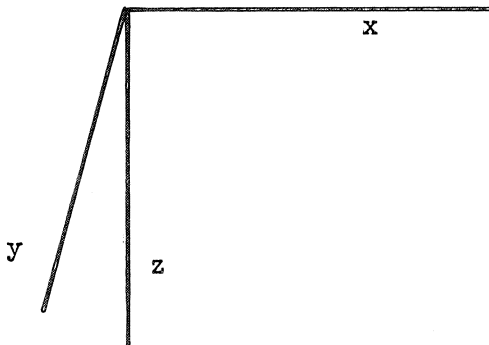
Daar dit een even functie is, vinden we hieruit de integraaluitdrukking van Peters:

$$(II.1.7) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \cos^2 h} p + iR \sin \phi [\operatorname{ctg} \phi \cosh p - \frac{1}{2} \sinh 2p] \cos^3 h p \, dp.$$

Om een oplossing te verkrijgen, kunnen we  $p$  als een complexe variabele beschouwen, "steepest descent"-wegen beschouwen, waar de  $\lim z \rightarrow 0$  niet voor nodig is, en vervolgens trachten (II.1.7) tot deze "steepest descent"-wegen te herleiden. De vergelijking is op deze wijze opgelost door Peters en Ursell.

## 2. Water van eindige diepte

Tot nu toe hebben we water van oneindige diepte beschouwd, terwijl we hier zullen trachten een vergelijking, analoog aan (II.1.7), af te leiden, indien we water van een eindige diepte  $h$  veronderstellen. We gaan weer uit van het in hoofdstuk I beschouwde probleem, waarbij we nu i.p.v. voor  $z = \infty$  voor  $z = h$  de randvoorwaarden krijgen  $\phi_z = 0$ .



De Laplace getransformeerde uitgangsvergelijkingen waren:

$$\Delta \bar{\phi} = 0$$

$$s\bar{\eta} = \bar{\phi}_z \quad (z = 0)$$

$$g\bar{\eta} = s\bar{\phi} - \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

met de nieuwe randvoorwaarde  $\bar{\phi}_z = 0$   $z = h$ .

Lossen we dit elementair op volgens scheiding van variabelen:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0$$

$$\bar{\phi} = f(z)g(r) \quad \text{dan vinden we:}$$

$$g''(r) + \frac{1}{r} \cdot g'(r) + \lambda^2 g(r) = 0, g(r) = J_0(\lambda r)$$

$$f''(z) = \lambda^2 f(z) \quad \text{waar bovendien voldaan moet wor-}$$

den aan:  $f'(h) = 0$ .

We vinden:

$$f(z) = \cosh -\lambda(z-h).$$

We kunnen nu als oplossing schrijven:  $\bar{\phi} = \int_0^\infty \cosh -\lambda(z-h) f(\lambda, s) J_0(\lambda r) d\lambda$  waar  $f(\lambda, s)$  door de randvoorwaarden van het vrije oppervlak bepaald wordt, nl.  $\bar{\phi}_z = s^2 \bar{\phi} - s \frac{\delta(r)}{2\pi r}$  voor  $z = 0$ .

Uitwerking geeft:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\cosh \lambda(z-h)}{\cosh \lambda h} J_0(\lambda r) \{g\lambda \sinh \lambda h + s^2 \cosh \lambda h\} f(\lambda, s) d\lambda = s \cdot \frac{\delta(r)}{2\pi r}.$$

$$\{s^2 \cosh \lambda h + g\lambda \sinh \lambda h\} f(\lambda, s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lambda \cdot s \quad \text{zodat}$$

$$f(\lambda, s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda s}{s^2 \cosh \lambda h + g\lambda \sinh \lambda h} = \frac{\lambda}{2\pi \cosh \lambda h} \cdot \frac{s}{s^2 + \lambda g \tanh \lambda h}$$

waarmee:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h} \cdot \frac{s}{s^2 + \lambda g \tanh \lambda h} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Hieruit volgt voor de snelheidspotential:

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h} \cdot \lambda J_0(\lambda r) \cos t \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h} d\lambda.$$

De oppervlakte verstoring wordt:

$$(II.2.1) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h} \cdot J_0(\lambda r) \sin(t \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h}) \lambda^{3/2} \sqrt{\tanh \lambda h} d\lambda$$

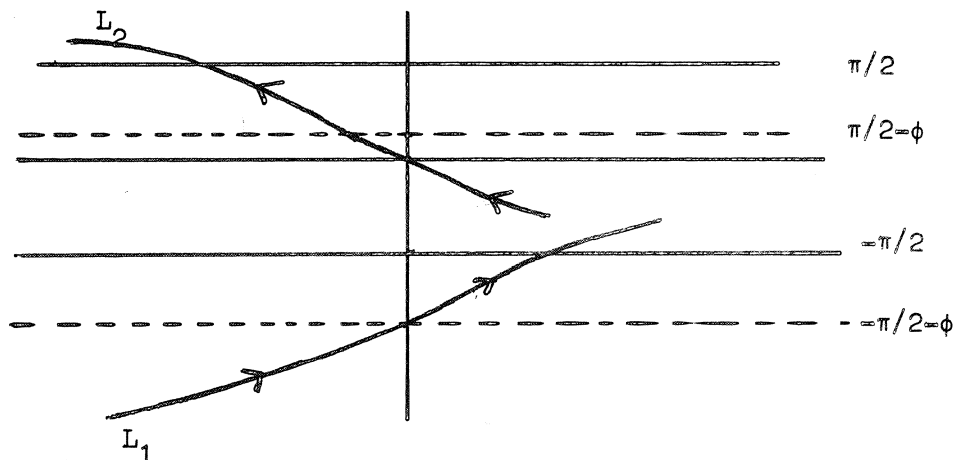
De oppervlakte verstoring t.g.v. een bewegende drukverstoring is, volgens de in (II.1) gevolgde procedure, in het stationaire geval:

$$(II.2.2) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h} J_0(\lambda \sqrt{(x+cu)^2 + y^2}) \cdot \lambda^{3/2} \sqrt{\tanh \lambda h} \sin(u \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h}) d\lambda.$$

We gaan wederom over op de reeds ingevoerde Hankelfuncties. Daar  $\frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h}$  zich als  $e^{-\lambda z}$  gedraagt voor kleine waarden van  $z$ , zullen we de laatste gebruiken i.v.m. de vlottere schrijfwijze. Door invoering van de Hankelfuncties gaat (II.2.2) over in:

$$(II.2.3) \quad \eta = \operatorname{Im} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{3/2} \sqrt{\tanh \lambda h} \cdot \sin(u \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h})$$

$$\int_{L_i} e^{-\lambda(x+cu)shw-i\lambda ychw} dw d\lambda.$$



Om tot integratie over de  $u$  te komen, moeten we  $w$  weer beperken tot de in (II.1) genoemde vakken, terwijl we m.b.t. de punten  $(0, \pi/2)$ ,  $(0, -\pi/2)$  weer de Cauchy-hoofdwaarde moeten nemen van de integratie langs  $L_i$ . Integratie geeft:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda c u shw} \sin(u \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h}) du = "im" \int_0^\infty e^{-u(\lambda c shw - i \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h})} du =$$

$$\frac{\sqrt{\lambda g \tanh \lambda h}}{c^2 \lambda^2 sh^2 w + \lambda g \tanh \lambda h}.$$

Hiermee gaat (II.2.3) over in:

$$(II.2.4) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty \lambda d\lambda e^{-\lambda z} \int_{L_i} \frac{e^{-\lambda x shw - i y \lambda chw} \tanh \lambda h}{c^2 \lambda^2 sh^2 w + g \tanh \lambda h} dw.$$

We kunnen in dit verband nog opmerken dat  $\lim_{h \rightarrow \infty} \tanh \lambda h = 1$  en (II.2.4) vergelijkbaar met (II.1.4).

Het zal zinvol blijken te zijn drie gevallen te onderscheiden:

$$a. \frac{c^2}{gh} < 1$$

$$b. \frac{c^2}{gh} = 1$$

$$c. \frac{c^2}{gh} > 1.$$

Door Havelock zijn deze drie gevallen m.b.v. de methode van de stationaire fase onderzocht, waarbij hij tot de volgende conclusies kwam:

$\frac{c^2}{gh} < 1$ . Algemene golfpatroon nadert tot dat van water van oneindige diepte, terwijl de hoek waarbinnen de verstoring in eerste benadering blijft groter is dan in geval van oneindig diep water.

$\frac{c^2}{gh} > 1$ . Systeem van transversale golven treedt niet meer op.

$\frac{c^2}{gh} = 1$ . Geen resultaten met de methode van de stationaire fase. Het blijkt dat in dit geval het probleem niet juist gesteld is. Het lineariseren der randvoorwaarden was gebaseerd op het feit dat de oppervlakte verstoring klein was. Dit nu geldt niet als  $c^2 = gh$ . Dit geval zal dus met niet-lineaire randvoorwaarden opgelost moeten worden.

In het volgende zullen we de twee eerste gevallen onderzoeken en proberen een vergelijking voor de oppervlakte verstoring af te leiden, analoog aan die in het geval van water van oneindige diepte, waarmee dan in principe de gehele asymptotische reeks gegeven zou zijn.

$$a. \frac{c^2}{gh} < 1.$$

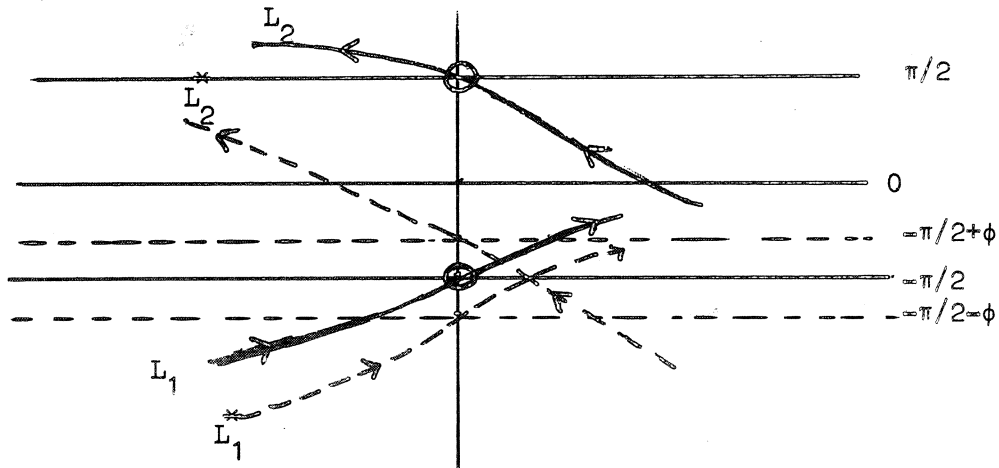
We gaan uit van (II.2.4) en schrijven:

$$\eta = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Im.} \int_0^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \int_{L_i} \frac{e^{-\lambda x \text{sh} w - i y \lambda \text{ch} w}}{\left( \sqrt{\frac{c^2}{g}} \frac{\text{sh} w}{\sqrt{\tanh \lambda h}} + \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \right) \left( \sqrt{\frac{c^2}{g}} \frac{\text{sh} w}{\sqrt{\tanh \lambda h}} - \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \right)} dw.$$

Polen bevinden zich in:

$$\text{shw} = \pm i \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}}.$$

We kunnen analoog aan het geval van oneindig diep water, de "steepest descent" wegen overeenkomend met de toestanden voor of achter de drukverstoring, weer in een figuur schetsen.



We onderzoeken voor welke waarde van  $\lambda$  de polen van reële op imaginaire as overgaan en noemen deze waarde  $\lambda_0$ . We gaan dan de integratie splitsen in  $\int_0^{\lambda_0} d\lambda$  en  $\int_{\lambda_0}^{\infty} d\lambda$ . Ook hier leert een nadere beschouwing, dat bij bepaling van  $\eta^* = \eta'(x < 0) - \eta'(x > 0)$ , de residu bijdragen t.g.v. de polen op de reële as tegen elkaar wegvallen, evenals de zadelpuntsbijdragen, zodat we residu bijdragen t.g.v. polen op de imaginaire as overhouden. Voor polen op de imaginaire as geldt, daar:

$$\text{shw} = \pm i \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}};$$

$$\sin q = \pm \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}}$$

zodat  $\lambda_0$  bepaald wordt door  $\frac{gh}{c^2} \cdot \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h} = 1$ , waar we uiteraard de nuloplossing moeten uitsluiten. Bepalen we allereerst het residu in

$$\text{shw}_0 = \pm i \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}}, \text{ wat bedraagt:}$$

$$2\pi i \frac{e^{R\lambda\{\cos \phi \operatorname{sh} w_0 - i \sin \phi \operatorname{ch} w_0\}}}{\left(\sqrt{\frac{c^2}{g}} \frac{\operatorname{sh} w_0}{\sqrt{\tanh \lambda h}} + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}\right) (\cosh w_0)}$$

dan vinden we als totale bijdrage, analoog aan (I.1):

$$(II.2.5) \quad 2 \lim_{z \rightarrow 0} \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda z} \frac{c^2 \lambda h}{gh \sqrt{\frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} \frac{c^2}{gh} - 1}} \sin \left\{ \lambda R \cos \phi \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} \right. \\ \left. \cos \left\{ \lambda R \sin \phi \sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} \right\} d\lambda \right.$$

We substitueren hierin:  $\frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} = \cos^2 h p$  waarmee (II.2.5) overgaat in:

$$2 \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\frac{-z \cos^2 h p \tanh \lambda h g}{c^2}} \frac{1}{\sinh p} \cos^2 h p \tanh \lambda h \sin \left\{ R \cos \phi \operatorname{ch} p \frac{g}{c^2} \tanh \lambda h \right\} \\ \cos \left\{ R \sin \phi \sinh p \cosh \frac{g}{c^2} \tanh \lambda h \right\} \frac{d\lambda}{dp} dp$$

$$\text{waarin: } \frac{d\lambda}{dp} = 2 \cosh p \sinh p \frac{(\tanh \lambda h)^2}{\tanh \lambda h - \frac{gh}{c^2} \cos^2 h p \tanh \lambda h (1 - \tan^2 h \lambda h)}.$$

Daar de integrand een even functie is vinden we hieruit:

(II.2.6)

$$\eta^{**} = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z \cos^2 h p \tanh \lambda h g}{c^2}} \frac{1}{e} i R \tanh \lambda h \frac{g}{c^2} \sin \phi \left\{ \operatorname{ctg} \phi \operatorname{ch} p - \frac{1}{2} \sinh 2p \right\} \\ \frac{\cos^3 h p (\tanh \lambda h)^3}{\tanh \lambda h - \frac{gh}{c^2} \cos^2 h p \tanh \lambda h (1 - \tan^2 h \lambda h)} dp.$$

waarin  $\lambda$  impliciet gegeven is door

$$\frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} = \cos^2 h p.$$

We merken op dat voor  $h \rightarrow \infty$  (II.2.6) overgaat in (II.1.7). Schrijven we  $\lambda = \lambda_0(p) + \lambda_1(h,p)$  met  $\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_1(h,p) = 0$  dan blijkt  $\lambda_0(p) = \frac{g}{2} \cos^2 h p$ ,

terwijl  $\lambda_1(h,p)$  geapproximeerd kan worden door  $\frac{g}{c^2} \frac{\cos^2 h p}{1 + e^{2h \cos^2 h p}}$ , wat gesubstitueerd in (II.2.6) de gehele asymptotische reeks geeft.

$$c \cdot \frac{c^2}{gh} > 1.$$

We hadden gevonden:

$$\eta = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \int_{L_1} \frac{e^{-\lambda x \operatorname{sh} w - i y \lambda \operatorname{ch} w} dw}{\left( \sqrt{\frac{c^2}{g}} \frac{\operatorname{sh} w}{\sqrt{\tanh \lambda h}} + \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \right) \left( \sqrt{\frac{c^2}{g}} \frac{\operatorname{sh} w}{\sqrt{\tanh \lambda h}} - \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \right)}$$

waar we de polen vinden uit:  $\operatorname{sh} w = \pm i \sqrt{\frac{gh \tanh \lambda h}{c^2 \lambda h}}$ . Daar zich in dit geval geen polen op de reële as bevinden, krijgen we hier i.p.v. (II.2.5):

$$(II.2.7) \quad \eta^* = 2 \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\sqrt{\frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} - 1}} \sin \left\{ \lambda R \cos \phi \sqrt{\frac{gh \tanh \lambda h}{c^2 \lambda h}} \right\} \\ \cos \left\{ \lambda R \sin \phi \sqrt{1 - \frac{gh \tanh \lambda h}{c^2 \lambda h}} \right\} d\lambda.$$

In de figuur is duidelijk te zien, dat als  $\frac{c^2}{gh}$  voldoende groot is, de oppervlakte verstoring voor de drukverstoring slechts nog bestaat uit de zadelpuntsbijdrage langs  $L_1^*$ . Het blijkt bovendien dat invoering van  $\cos^2 h p$ , zoals boven is gedaan, hier weinig zin heeft.

Indien we  $e^{-\lambda z}$  aanpassen is de integrand een even functie en kunnen we schrijven:

$$(II.2.8) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda|z} \frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\sqrt{\frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} - 1}} \\ e^{i\lambda R \left\{ \cos \phi \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} - \sin \phi \sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} \right\}} d\lambda$$

waarmee de uitdrukking voor de oppervlakte verstoring, indien  $\frac{c^2}{gh} > 1$ , herleid is tot een enkelvoudige integraal, waarop eventueel de zadel-puntsmethode toegepast kan worden, indien (II.2.8) herleid kan worden tot de "steepest descent" weg, bepaald door  $\lambda \left\{ \cos \phi \sqrt{\frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} - \sin \phi \sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} \frac{\tanh \lambda h}{\lambda h}} \right\}$ .

### III. Niet-stationair schip-golfprobleem

#### 1. Water van oneindige diepte

De niet-stationaire uitdrukking voor de oppervlakte-verstoring in meebewegende coördinaten bedroeg:

$$\eta = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t du \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x+cu)^2 + y^2}) \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda.$$

Invoering van de Hankelfuncties geeft:

$$\eta = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Im} \int_0^t du \int_0^\infty e^{-\lambda z} \int_{L_1} e^{-\lambda(x+cu)shw - i\lambda ychw} \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda dw$$

zodat het verschil met de stationaire toestand bedraagt:

$$(III.1.1) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Im} \int_t^\infty du \int_0^\infty e^{-\lambda z} \int_{L_1} e^{-\lambda(x+cu)shw - i\lambda ychw} \sin u \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda dw.$$

We voeren in (III.1.1) integratie uit over de  $u$  en vinden, daar:

$$\int_t^\infty e^{-\lambda c u shw} \sin u \sqrt{\lambda} = \text{"im"} \int_t^\infty e^{-u(\lambda c shw - i\sqrt{\lambda})} du =$$

$$e^{-t\lambda c shw} \frac{\sqrt{\lambda} \cos t\sqrt{\lambda} + \lambda c shw \sin t\sqrt{\lambda}}{\lambda^2 c^2 sh^2 w + \lambda}$$

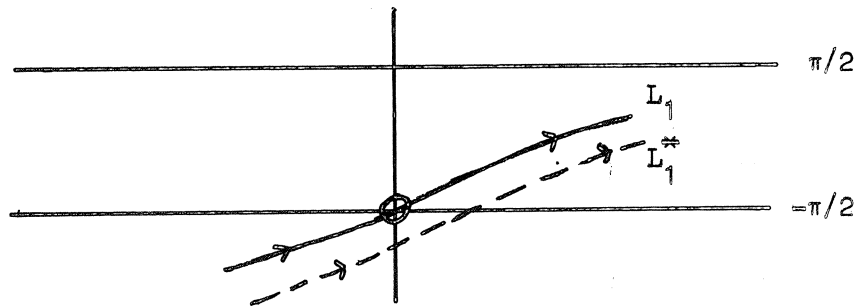
dat (III.1.1) overgaat in:

$$(III.1.2) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \text{Im} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{3/2} \int_{L_1} e^{-t\lambda c shw - \lambda x shw - i\lambda y chw}$$

$$\left( \frac{\sqrt{\lambda} \cos t\sqrt{\lambda} + \lambda c shw \sin t\sqrt{\lambda}}{\lambda c^2 sh^2 w + \lambda} \right) d\lambda dw$$

waar  $L_1$  weer de bekende integratie wegen zijn uit I, terwijl we bovendien weer de Cauchy-hoofdwaarde moeten nemen. We beschouwen de toestand achter de drukverstoring, waarbij we moeten bedenken dat  $x < ct$  en nemen als integratieweg in (III.1.2)  $L_1$ . Voor  $x < 0$  gaat (III.1.2) over in:

$$(III.1.3) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{3/2} d\lambda \int_{L_i} e^{-\lambda \operatorname{sh} w (ct-x) - iy \lambda \operatorname{ch} w} \\ \frac{(\sqrt{\lambda} \cos t \sqrt{\lambda} + \lambda \operatorname{csh} w \sin t \sqrt{\lambda})}{\lambda c^2 \operatorname{sh}^2 w + 1} dw.$$



We gaan in (III.1.3) de integratie langs  $L_1$  vervangen door integratie langs  $L_1^*$ , waarbij we dan uiteraard rekening moeten houden met de gepasseerde polen, zowel op de reële als imaginaire as. Schrijven we  $ct - x = A \cos \phi$ ,  $y = A \sin \phi$  dan vinden we het zadelpunt uit  $\frac{d}{dw} (\operatorname{sh}(w_0 + i\phi)) = 0$  ( $w_0 = 0, -\pi/2 - \phi$ ) en "steepest descent" weg uit:  $\operatorname{Im} \operatorname{sh}(w + i\phi) = \operatorname{Im} \operatorname{sh}(w_0 + i\phi)$ . We veronderstellen dat de bijdragen t.g.v. polen op de reële as en "steepest descent" weg  $L_1^*$  verwaarloosbaar zijn bij die t.g.v. polen op de imaginaire as. Residu t.g.v. pool op de imaginaire as bedraagt:

$$-2\pi \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} e^{-iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi + \sqrt{\lambda-1} \sin \phi)}$$

zodat deze term geschreven kan worden als:

$$(III.1.4) \quad n^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_1^{\frac{1}{\cos^2 \phi}} e^{-\lambda z} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} e^{iR\sqrt{\lambda}(\cos \phi + \sqrt{\lambda-1} \sin \phi)} d\lambda$$

waarin  $\phi = \arctg \frac{R \sin \phi}{ct - R \cos \phi}$ . Invoering van  $\lambda = \operatorname{ch}^2 p$ , met de voorwaarde dat  $n^*(\phi) = n^*(-\phi)$  doet (III.1.4) overgaan in:

$$(III.1.5) \quad n^* = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{p_0} e^{-\cos^2 hp z} \cos^3 hp \cos \left\{ \frac{1}{2} R \sin \phi \sinh 2p \right\} \sin \{ R \cos \phi \cosh p \} dp$$

waarin  $p_0$  gevonden wordt uit:  $\cosh p_0 = \frac{1}{\cos \phi}$ . Daar de integrand een even functie is, gaat (III.1.5) na substitutie van  $p = p_0 \tanh q$  over in:

$$(III.1.6) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\cos^2 h(p_0 \tanh q)z} \frac{p_0 \cos^3 h(p_0 \tanh q)}{c^2 h q} e^{iR \sin \phi \{ctq \phi ch(p_0 \tanh q) - \frac{1}{2} sh^2(p_0 \tanh q)\}} dq.$$

Op analoge wijze kan men een uitdrukking afleiden voor de oppervlakte-verstoring voor de drukverstoring. In dat geval zullen we vinden:

$$\phi = \arctan \frac{y}{ct+x}.$$

## 2. Water van eindige diepte

We zullen in het kort nagaan wat er zal gebeuren, wanneer we bovenstaand procédé toepassen op vergelijkingen, waarin de diepte van het water  $h$  gesteld is. Analooq aan (III.1.2) vinden we hier:

$$(III.2.1) \quad \eta^* = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^{1/2} \int_{L_1} e^{-t\lambda cshw - \lambda xshw - iy\lambda chw} \sqrt{g \tanh \lambda h} \frac{\cos t \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h} \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h} + \sin t \sqrt{\lambda g \tanh \lambda h} \lambda cshw}{\lambda c^2 sh^2 w + g \tanh \lambda h} dwd\lambda.$$

We zullen hier weer de 2 gevallen uit (II) onderscheiden.

$$a. \frac{c^2}{gh} < 1.$$

Dit geval kan analooq behandeld worden. We krijgen hier alleen de moeilijkheid uit (II) terug, dat  $\lambda$  impliciet gegeven is door  $\frac{c^2}{gh} \frac{\lambda h}{\tanh \lambda h} = \cos^2 h p$ . De oplossing zal dus zeer veel gelijken op (III.1.6) met dezelfde moeilijkheid die optrad in (II.2.7).

$$c. \frac{c^2}{gh} > 1.$$

In dit geval zal de situatie heel anders zijn. In (II) hebben we gezien dat indien  $\frac{c^2}{gh}$  groot genoeg is, de oppervlakte verstoring voor het schip slechts gelijk was aan de zadelpuntsbijdrage van  $L_1^*$ . Men zal hier een identieke situatie verkrijgen, zodat  $\eta^*$  bij benadering gelijk zal zijn aan de zadelpuntsbijdrage, zoals in (III.1) beschreven is.

IV. Appendix

In het voorgaande is de snelheid  $c$  steeds constant verondersteld. De zaak wordt interessanter, wanneer we niet-constante snelheden  $c(t)$  gaan beschouwen. We zullen ons beperken tot het geval van water van oneindige diepte, terwijl de toestand uiteraard niet stationair is. We kunnen hier analoog aan (II.1.1) een uitdrukking afleiden voor de oppervlakte verstoring, waarvoor we vinden:

$$(IV.1) \quad \eta = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^t dt^* \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda \sqrt{(x + \int_{t^*}^t c(u) du)^2 + y^2}) \sin(t - t^*) \sqrt{\lambda} \lambda^{3/2} d\lambda,$$

waarin  $x$  de meebewegende coördinaat is. De stationaire toestand vinden we (indien deze bestaat) voor  $t \rightarrow \infty$ , zodat we ons allereerst beperken tot snelheden  $c(t)$ , waarvoor geldt  $c(0) = 0$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c$  (monotoon stijgend). Daar zelfs deze klasse van snelheden grote moeilijkheden oplevert, zullen we hier volstaan met een ruwe schets van een eventueel te volgen methode. We volgen de procedure uit (II), zij het in iets gewijzigde vorm. Het invoeren van de Hankelfuncties levert hier de integratie

$$(IV.2) \quad "Im" \int_0^t e^{-\lambda shw \{ \int_{t^*}^t c(u) du \} + i(t - t^*) \sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} dt^*.$$

Daar in het algemeen van de functie  $c(t)$  de primitieve functie  $\bar{c}(t)$  wel te vinden is, gaat (IV.2) over in:

$$"Im" e^{-\lambda shw \bar{c}(t) + it \sqrt{\lambda}} \int_0^t e^{\lambda shw \bar{c}(t^*) - it^* \sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda} dt^*.$$

Veronderstellen we dat de laatste integratie een oplossing heeft van de vorm

$$\frac{e^{\lambda shw \bar{c}(t) - it \sqrt{\lambda}}}{g(t, \lambda, shw)} = \frac{1}{g(0, \lambda, shw)}$$

dan krijgen we twee termen, waarvan de eerste (die in het geval van een constante snelheid de stationaire oplossing geeft) bedraagt:

$$\frac{Im \, g}{g \, g}$$

terwijl de tweede is:

$${}^{\text{"Im"}} \frac{e^{-\lambda shw\bar{c}(t) + it\sqrt{\lambda}}}{g(0, \lambda, shw)}$$

en dus voor grote waarden van  $t$  naar nul gaat. Vgl. (IV) gaat nu over in:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^{3/2} \int_L \frac{e^{-x\lambda shw - iy\lambda chw} \operatorname{Im} g^{\pm}}{g g^{\pm}} dw d\lambda$$

waar men de polen bepaalt uit  $g(\lambda, shw, t) = 0$  resp.  $g^{\pm} = 0$  en  $L$  gaat deformeren tot een "steepest descent" weg. We verwachten vervolgens in de eenvoudige integraal, die we op deze wijze hopen te verkrijgen en waarop we na deformatie de zadelpuntsmethode zullen toepassen, voor het samenvallen der zadelpunten een verband tussen  $r$ ,  $\phi$  en  $t$  aan te treffen.

## Literatuur

- Kelvin      Inst. of Mech. Eng. Proc., 1887 (on ship waves, pag. 409)  
             Proc. of the Royal Society, 1887, Vol. 42
- Lamb        Hydrodynamics, Dover 1932
- Hogner      Ark. Mat. Astr. Fys., 1923
- Peters      Comm. on pure and appl. math., 1949
- Stoker      Water waves, Interscience 1957
- Ursell      Journ. of fluid mech., Vol. 8 part 3, 1960
- Jeffries    Asympt. approximations, Oxford Univ. Press, 1962
- Timman      Simon Stevin, afl. 1-II, 1961.



# Errata bij TN41

|                                                            |                                                                                                 |                         |                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| pag. 3                                                     | $\phi(x,y,z)$<br>$\frac{d}{dt} (y - \eta) = 0$<br>$\eta = \frac{\partial \phi}{\partial t} - p$ | moet zijn<br>" "<br>" " | $\phi(x,y,z,t)$<br>$\frac{d}{dt} (z + \eta) = 0$<br>$-\eta = \frac{\partial \phi}{\partial t} + p$ |
| zodat $\phi$ op pag. 4 voorzien moet worden van min-teken. |                                                                                                 |                         |                                                                                                    |
| pag. 4                                                     | $\int_0^{\infty} \frac{\delta(r)}{2\pi r} dr$                                                   | moet zijn               | $\int_0^{\infty} r \frac{\delta(r)}{2\pi r} J_0(\lambda r) dr$                                     |
| pag. 12                                                    | zie pag. 3                                                                                      |                         |                                                                                                    |
| pag. 20                                                    | zie pag. 3                                                                                      |                         |                                                                                                    |
| pag. 32                                                    | r                                                                                               | moet zijn               | $R_0$                                                                                              |

